Leonhard Fellermayr
Mat.Nr. 221281305090
Tutorium E (Do 14-16 Linde/Wugalter E06)

C++

Übungen zur Analysis I für Informatiker - Blatt 11 (bis 26.01.04)

Aufgabe 46. Grenzwerte

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{sin(x^2)}{x} =^{(*)} \lim_{x\to 0} \frac{(sin(x^2))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{cos(x^2)\cdot 2x}{1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} e^{-\frac{sin(x^2)}{x}} = e^{-0} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{sin(x^2)}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{sin(x^2)}{x}} = e^{-0} = e^0 = 1$$

(b) $$\lim_{x\searrow a} \frac{|x^2-1|}{x^2-1} = \begin{cases} 1 & \text{für } |a| \geq 1 \\ -1 & \text{für } |a| < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\nearrow a} \frac{|x^2-1|}{x^2-1} = \begin{cases} 1 & \text{für } |a| > 1 \\ -1 & \text{für } |a| \leq 1 \end{cases}$$

(c) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-cos(2x)}{sin 2x} = \frac{1-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} cos(2x)}{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} sin(2x)} = \frac{1-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} cos(x)}{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} sin(x)} = \frac{1-0}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(2x)}{sin(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{sin(x)} =^{(*)} \lim_{x\to 0} \frac{(1-cos(x))'}{(sin(x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{cos(x)} = \lim_{x\to 0} tan(x) = 0$$

(*) Regel von *de l'Hospital*

Aufgabe 47. Konvergenzradius R

(a) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^k$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{(-1)^k}{k+1}\right|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow R = 1$$

(b) $$\sum_{k=0}^{\infty} (2^k + 3^k) x^k$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{2^k+3^k} = 3 \Rightarrow R = \frac{1}{3}$$

(c) $$\sum_{k=0}^{\infty} k^k x^k$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^k} = \lim_{k\to\infty} k = \infty \Rightarrow R = \frac{1}{\infty} = 0$$

(d) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!} x^k$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{k^k}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\sqrt[k]{k!}} =^{(*)} e \Rightarrow R = \frac{1}{e}$$

(*) Aus Aufgabe 32d) ist bekannt: $\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{k!}}{k} = \frac{1}{e} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\sqrt[k]{k!}} = e$.

Aufgabe 48. Untersuchung des Konvergenzverhaltens für $n \in \mathbb{N}$.

(a) $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt[n]{k}}$$

Anwendung des *Leibniz-Kriteriums* auf $\left|\frac{1}{\sqrt[n]{k}}\right|$:

1. Zeige *monoton fallend*: $\frac{1}{\sqrt[n]{k}} > \frac{1}{\sqrt[n]{k+1}} \Leftrightarrow \sqrt[n]{k} < \sqrt[n]{k+1} \Leftrightarrow k < k+1$
2. Zeige *Nullfolge*: $\frac{1}{\sqrt[n]{k}} = \sqrt[n]{\frac{1}{k}}$
   $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{k}} = 0$ *wg. Monotonie der Wurzelfunktion*

Aus 1. und 2. folgt nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium die **Konvergenz** dieser alternierenden Reihe.

(b) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{k}}$$

Anwendung des *Minoranten-Kriteriums.* Für alle $n \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ gilt

$$k \geq \sqrt[n]{k} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{k}} \geq \frac{1}{k}$$

Also existiert eine divergente Minorante. Deshalb ist auch die größere Reihe **absolut divergent** (gegen $+\infty$).

(c) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{n^k}$$

Anwendung des *Wurzelkriteriums*:

$$q = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{k^n}{n^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{k^n}}{n} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left(\sqrt[k]{k}\right)^n}{n} = \frac{1^n}{n} = \frac{1}{n}$$

Für $n > 1$ ist $q < 1$ und die Reihe damit konvergent, sogar **absolut konvergent**, weil $k \geq 1$ und $n \in \mathbb{N}$.

Für $n = 1$ ist die Reihe divergent. Dies ist durch das WK allerdings noch nicht bewiesen, da in diesem Fall $q = 1$. Also Beweis:

$$n = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^1}{1^k} = \sum_{k=1}^{\infty} k$$

Die Folgenglieder k sind streng monoton wachsend. Damit ist die Nullfolgenbedingung nicht erfüllt und die Reihe ist für $n = 1$ tatsächlich divergent, genau genommen **absolut divergent gegen** $+\infty$.

(d) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

Anwendung des *Quotientenkriteriums*:

$$q = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)^n}{(k+1)!}}{\frac{k^n}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^n \cdot k!}{k^n \cdot (k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^n}{k^n \cdot (k+1)} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left[\left(\frac{k+1}{k} \right)^n \cdot \frac{1}{k+1} \right] = 1 \cdot \frac{1}{\infty} = 0 < 1$$

Die Reihe konvergiert aufgrund $0 < q < 1$. Wegen $k \geq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ könnte man denselben Grenzwert auch für $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(k+1)^n}{(k+1)!}}{\frac{k^n}{k!}} \right|$ herleiten. Deshalb ist die Reihe sogar **absolut konvergent**.

Aufgabe 49. Tangens und Arcustangens

(a) Auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sind $cos(x)$ und $sin(x)$ stetig, außerdem $cos(x) \neq 0$.
$\Rightarrow$ nach **Satz 4.3** ist dann auch $tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$ stetig

Davon abgesehen:

Nach **Satz 0.21** gilt für eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ die Beziehung f $= (f^{-1})^{-1}$. Auf tan angewendet: $tan(x) = (arctan(x))^{-1}$

Mit dieser Beziehung und unter Berücksichtigung des eingeschränkten Definitionsbereichs ist nach der Argumentation in Teilaufgabe (c) auch

$$tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \left(k + \frac{1}{2} \right) \cdot \pi; k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion (nach **Satz 4.7**).

(b) Sei $0 \leq x < y < \frac{\pi}{2}$. Im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}[$ gilt:

- sin monoton steigend
- cos monoton fallend

$\Rightarrow tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)} < \frac{sin(y)}{cos(y)} = tan(y)$

Also ist $tan(x)$ in $[0, \frac{\pi}{2}[$ streng monoton wachsend. Dank der Beziehung $tan(-x) = -tan(x)$ gilt dies auch für das Intervall $]\frac{\pi}{2}, 0[$ und somit für das ganze Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Beweise $tan(-x) = -tan(x)$:

$tan(-x) = \frac{sin(-x)}{cos(-x} = \frac{-sin(x)}{cos(x)} = -\frac{sin(x)}{cos(x)} = -tan(x)$

(c) Die Funktion tan ist nach (b) streng monoton wachsend. Damit bildet tan Werte bijektiv ab, woraus die Existenz der Umkehrfunktion $arctan$ folgt.

Die Eigenschaft "streng monoton wachsend"erbt $arctan$ aufgrund der Bijektivität von tan (Eindeutigkeit der Umkehrabbildung).

Zur Stetigkeit von arctan:

Sei $b \in \mathbb{R}$ und $a := arctan(b)$, d. h. $b = tan(a)$.

Sei $\epsilon > 0$. Mit $b_1 := tan(a - \epsilon)$ und $b_2 := tan(a + \epsilon)$ ist $b_1 < b < b_2$ für beliebig kleines ϵ.

tan bildet also $[a - \epsilon, a + \epsilon]$ bijektiv auf $[b_1, b_2]$ ab.

Mit $\delta := min(b - b_1, b_2 - b)$ zeigt das ϵ-δ-Kriterium die Stetigkeit von $arctan$ für beliebiges $b \in \mathbb{R}$:

$$arctan(]b - \delta, b + \delta[) \subset]a - \epsilon, a + \epsilon[$$

Daraus lässt sich für umkehrbare Funktionen allgemein der Schluss ziehen: f stetig $\Leftrightarrow$ f^{-1} stetig (vgl. **Satz 4.7**).

(d) **Bestimmung von** $arctan(0)$

$arctan(0) \Leftrightarrow tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)} = 0$
$\frac{sin(x)}{cos(x)} = 0$ für $sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bestimmung von $arctan(1)$

$arctan(1) \Leftrightarrow tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)} = 1 \Leftrightarrow sin(x) = cos(x) \Leftrightarrow sin^2(x) = cos^2(x)$
$\Leftrightarrow sin^2(x) - cos^2(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \cdot cos^2(x) = 0$
$\Leftrightarrow 1 = 2 \cdot cos^2(x) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}} = cos(x) \Leftrightarrow arccos\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = x \approx 0,7854...$

Bestimmung von $arctan(-1)$

Wir wissen: $arctan(-x) = -arctan(x)$ (Beweis siehe unten). Also:
$arctan(-1) = -arctan(1) = -arccos\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = x \approx -0,7854...$

Grenzverhalten

$$\lim_{x\to-\infty} arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to+\infty} arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

Begründung: $arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ist streng monoton wachsend.

Zeige $arctan(-x) = -arctan(x)$

Die Beziehung $tan(-x) = -tan(x)$ wurde bereits für (b) bewiesen. Damit folgt

$$\begin{array}{crcl} & arctan(-x) & = & y \\ \Leftrightarrow & tan(y) & = & -x \\ \Leftrightarrow & -tan(-y) & = & -x \\ \Leftrightarrow & tan(-y) & = & x \\ \Leftrightarrow & arctan(x) & = & -y \\ \Leftrightarrow & -arctan(x) & = & y. \end{array}$$

Aufgabe 50. Approximation an die Arcus-Funktionen

(c) **Quellcode (ANSI C++):**[1]

```
#include <iostream>
#include <errno.h>

using namespace std;
typedef long double ldb;

const ldb EPSILON_IEEE64 = 10e-16;

ldb my_arcsin_recurse (ldb l, int n)
{
   ldb t = (2 * l) / sqrtl(2 + 2 * sqrtl(1 - powl(4, -n) * powl(l, 2)));

   if (fabsl (l - t) >= EPSILON_IEEE64)
      return my_arcsin_recurse (t, ++n);
   else
      return t;
}

ldb my_arcsin (ldb x) {
   if (fabsl (x) > 1) errno = EDOM;
```

[1] Auch im WWW: http://www.slacky.de/files/uni/analysis/arcsct_approx.cpp

```
   else return (my_arcsin_recurse (x, 0));
}

ldb my_arccos (ldb x) {
   if (fabsl (x) > 1) errno = EDOM;
   else return (M_PI_2 - my_arcsin (x));
}

ldb my_arctan (ldb x) {
   return (my_arcsin (x / sqrtl (1 + powl (x, 2))));
}

void do_output (ldb x)
{
  printf ("     id (x) = % Lg\n", x);
  printf ("my_asin (x) = % .15Lf   C++ asin (x) = % .15Lf\n",   my_arcsin (x), asinl (x));
  printf ("my_acos (x) = % .15Lf   C++ acos (x) = % .15Lf\n",   my_arccos (x), acosl (x));
  printf ("my_atan (x) = % .15Lf   C++ atan (x) = % .15Lf\n\n", my_arctan (x), atanl (x));
}

int main ()
{
  errno = 0;
  ldb beispiele[] = { -0.7, 0.2, 0.5, 1, 5, 1000 };

  for (int i = 0; i < sizeof (beispiele) / sizeof (ldb); i++)
     do_output (beispiele[i]);
}
```

Programmausgabe:

```
     id (x) = -0.7
my_asin (x) = -0.775397496610753   C++ asin (x) = -0.775397496610753
my_acos (x) =  2.346193823405649   C++ acos (x) =  2.346193823405650
my_atan (x) = -0.610725964389208   C++ atan (x) = -0.610725964389209

     id (x) =  0.2
my_asin (x) =  0.201357920790330   C++ asin (x) =  0.201357920790331
my_acos (x) =  1.369438406004566   C++ acos (x) =  1.369438406004566
my_atan (x) =  0.197395559849880   C++ atan (x) =  0.197395559849881

     id (x) =  0.5
my_asin (x) =  0.523598775598299   C++ asin (x) =  0.523598775598299
my_acos (x) =  1.047197551196598   C++ acos (x) =  1.047197551196598
my_atan (x) =  0.463647609000806   C++ atan (x) =  0.463647609000806

     id (x) =  1
my_asin (x) =  1.570796326794896   C++ asin (x) =  1.570796326794897
my_acos (x) =  0.000000000000000   C++ acos (x) =  0.000000000000000
my_atan (x) =  0.785398163397448   C++ atan (x) =  0.785398163397448

     id (x) =  5
my_asin (x) =  nan                 C++ asin (x) =  nan
my_acos (x) =  nan                 C++ acos (x) =  nan
my_atan (x) =  1.373400766945016   C++ atan (x) =  1.373400766945016

     id (x) =  1000
my_asin (x) =  nan                 C++ asin (x) =  nan
my_acos (x) =  nan                 C++ acos (x) =  nan
my_atan (x) =  1.569796327128230   C++ atan (x) =  1.569796327128230
```