

Übungen zur Vorlesung Informatik I

Musterlösungen zu Blatt 3

Lösung zu Aufgabe S-13:

Angenommen, wir schreiben eine Funktion *vollkommen*: $\mathbb{N} \rightarrow \text{bool}$, die von einer natürlichen Zahl n entschieden soll, ob diese vollkommen ist. Dann wird diese Funktion nicht darum herumkommen, einen Teiler t von n zu wählen, um das Problem auf ein kleineres zu reduzieren. Dann gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten für einen rekursiven Aufruf.

1. Es wird *vollkommen*($n - t$) aufgerufen. Aus den Teilern von $n - t$ läßt sich jedoch nicht mehr auf die Teiler von n schließen.
2. Es wird *vollkommen*(n/t) aufgerufen. Dann kann man Teiler übersehen, z.B. wenn t keine Primzahl ist. Umgekehrt, falls t immer prim ist, dann übersieht man solche Teiler, die nicht prim sind.

Um diese Probleme zu umgehen, betten wir die Frage nach der Vollkommenheit einer Zahl in eine generellere Fragestellung ein: das Berechnen der Summe aller Teiler von n , die größer als 1 aber kleiner gleich i sind.

```
teiler_summe = function(n, i: nat) nat
               if i = 1 then 0
               else if n mod i = 0 then i + teiler_summe(n, i - 1)
               else teiler_summe(n, i - 1)
```

Dann läßt sich folgendermaßen bestimmt, ob n vollkommen ist:

```
vollkommen = function(n: nat) bool
              teiler_summe(n, n - 1) = n - 1
```

Lösung zu Aufgabe S-14:

a) $m(1) = 2^{\lceil \log_2(1) \rceil + 1} - 1 = 2^{0+1} - 1 = 1$. Sei nun $n > 1$. Dann ist $\lceil \log_2(n) \rceil + 1 \geq 2$. Ausserdem gilt für alle $n \geq 1$, dass $2^{\lceil \log_2(n) \rceil + 1}$ die zu n nächstgrößere Zweierpotenz ist. Und für $n > 1$ ist diese immer größer als $n + 1$.

b) Es gibt zwei verschiedene rekursive Aufrufe innerhalb der Definition von $f(n)$. Sei zuerst $n = 2^{n'}$ für ein $n' \geq 1$. Dann wird f mit Argument n' aufgerufen. Es gilt

$$m(n) = 2^{\lceil \log_2(n) \rceil + 1} - n = 2^{\lceil \log_2(2^{n'}) \rceil + 1} - 2^{n'} = 2^{n'+1} - 2^{n'} = 2^{n'} > 2^{\lceil \log_2(n') \rceil + 1} - n' = m(n')$$

Ist n keine Zweierpotenz, dann wird f mit Argument $n' = n + 1$ aufgerufen. Es gilt

$$m(n') = 2^{\lceil \log_2(n') \rceil + 1} - n' = 2^{\lceil \log_2(n+1) \rceil + 1} - n - 1 \leq 2^{\lceil \log_2(n) \rceil + 1} - n - 1 < 2^{\lceil \log_2(n) \rceil + 1} - n = m(n)$$

wobei die erste Abschätzung die Tatsache benutzt, dass n keine Zweierpotenz ist.

Lösung zu Aufgabe S-15:

Wir definieren als Abstiegsfunktion $M(n, m) = |n - m|$ für f . Erstens terminiert der Aufruf von $f(n, m)$, falls $M(n, m)$ minimal, d.h. 0 ist. Zweitens ist zu zeigen, dass die M -Werte an Stellen (n', m') kleiner sind als der M -Wert von (n, m) , falls $f(n, m)$ über $f(n', m')$ definiert ist. Das geschieht an zwei Stellen. Es gelten

$$M(n, \lfloor \frac{n+m}{2} \rfloor) = |n - \lfloor \frac{n+m}{2} \rfloor| < |n - m| = M(n, m)$$

und

$$M(\lceil \frac{n+m}{2} \rceil, m) = |\lceil \frac{n+m}{2} \rceil - m| < |n - m| = M(n, m)$$

da das arithmetische Mittel von n und m immer näher an n liegt als m dies tut und umgekehrt. Durch das Auf- und Abrunden können Randfälle auftreten, d.h. in den obigen Ungleichungen könnte prinzipiell doch Gleichheit gelten. Dies kann aber nur zu Problemen führen, falls der Abstand von n und m gleich 1 ist. Sei z.B. $m = n + 1$. Dann gilt

$$M(n, \lfloor \frac{2 \cdot n + 1}{2} \rfloor) = |n - \lfloor n + \frac{1}{2} \rfloor| = 0 < 1 = |n - n - 1| = M(n, m)$$

und

$$M(\lceil \frac{2 \cdot n + 1}{2} \rceil, n + 1) = |\lceil n + \frac{1}{2} \rceil - n - 1| = 0 < 1 = |n - n - 1| = M(n, m)$$

und analog für $n = m + 1$.

Lösung zu Aufgabe S-16:

- a) $(\mathbf{nat} \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
- b) $(\alpha \rightarrow \beta) \times \alpha \rightarrow \beta$
- c) $(\mathbf{nat} \rightarrow \mathbf{nat}) \times \mathbf{nat} \rightarrow \mathbf{nat}$
- d) $(\mathbf{nat} \times \alpha \rightarrow \mathbf{nat} \times \alpha) \times \mathbf{nat} \times \alpha \rightarrow \mathbf{nat} \times \alpha$

wobei \times stärker bindet als \rightarrow .