Leonhard Fellermayr
Mat. Nr. 128105090
Prioritäten: 22, 23, 24, 21

Übungsblatt 5 zur Numerischen Mathematik I

Aufgabe 21

a) Zu zeigen: Für $-\infty < a < b \leq +\infty$ und $f,\, g \in L^2([a,b])$ gilt

$$\left| \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

In Blatt 4, Aufgabe 19a)-c) wurde gezeigt, dass durch $\|f\|_2 := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ eine Norm (nämlich die p-Norm für $p = 2$) definiert wird. Benutze Teil c):

$$2 \cdot \|f \cdot f'\|_1 \leq 2 \cdot \|f\|_2 \cdot \|f'\|_2$$

Eliminiere 2 und setze in der obigen Abschätzung $f' := g$:

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

Für das Integral über $[a, b]$ gilt entsprechend

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

b) Sei $-\infty < a < b < +\infty$ und $\{a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$; (x_0, f_0), ..., (x_N, f_N) Stützpunkte.
Zu zeigen: $\int_a^b |s'(x)|^2 dx \leq \int_a^b |g'(x)|^2 dx$ $\forall$ absolutstetigen Funktionen g.

$$(*) \qquad \|g' - s'\|^2 = \int_a^b |g'(x) - s'(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} |g'(x) - s'(x)|^2 dx =$$

$$= \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(g'(x)^2 - 2g'(x)s'(x) + s'(x)^2 \right) dx =$$

$$= \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} g'(x)^2 dx + \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} s'(x)^2 dx - 2 \cdot \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} g'(x)s'(x) dx$$

Aus 21a) lässt sich folgende Abschätzung herleiten:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} g'(x)s'(x) dx \leq \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} g'(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} s'(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Nach Angabe ist $g(x_j) = f_j = s(x_j)$:

$$\Rightarrow \int_{x_{k-1}}^{x_k} g'(x)s'(x) dx = \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} g'(x)^2 dx) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} s'(x)^2 dx) \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} s'(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} s'(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} s'(x)^2 dx$$

Der obige Ausdruck **(*)** lässt sich somit weiter entwickeln:

$$\|g' - s'\|^2 = ... = \sum_{k=1}^{N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} g'(x)^2 dx + \sum_{k=1}^{N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} s'(x)^2 dx - 2 \cdot \sum_{k=1}^{N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} s'(x)^2 dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} g'(x)^2 dx - \sum_{k=1}^{N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} s'(x)^2 dx = \int_a^b |g'(x)|^2 dx - \int_a^b |s'(x)|^2 dx$$

Aus $0 \leq \|g' - s'\|^2 = \|g'\|^2 - \|s'\|^2$ folgt

$$\|s'\|^2 \leq \|g'\|^2 \Rightarrow \int_a^b |s'(x)|^2 \leq \int_a^b |g'(x)|^2 dx$$

Aufgabe 22

(i) **Dividierte Differenzen für p:**

$p[0] = 1$

$p[0] = 1 \quad p[0,0] = p'(0) = 0$

$p[1] = 3 \quad p[0,1] = 2 \qquad p[0,0,1] = 2$

$p[1] = 3 \quad p[1,1] = p'(1) = \alpha \quad p[0,1,1] = \alpha - 2 \quad p[0,0,1,1] = \alpha - 4$

$$\Rightarrow p(x) = p[0] + p[0,0] \cdot x + p[0,0,1] \cdot x^2 + p[0,0,1,1] \cdot x^2 \cdot (x-1) =$$

$$= 1 + 2x^2 + (\alpha - 4)x^2(x-1) = 1 + 2x^2 + (\alpha x^2 - 4x^2)(x-1) = 1 + 2x^2 + \alpha x^3 - 4x^3 - \alpha x^2 + 4x^2 =$$

$$= 1 + 6x^2 - 4x^3 + \alpha x^3 - \alpha x^2$$

Bilden der 2. Ableitung:

$$p'(x) = 12x - 12x^2 + 3\alpha x^2 - 2\alpha x$$

$$p''(x) = 12 - 24x + 6\alpha x - 2\alpha$$

(ii) **Dividierte Differenzen für q:**

$q[3] = -1$

$q[3] = -1 \quad q[3,3] = q'(3) = -4$

$q[1] = 3 \quad q[3,1] = -2 \qquad q[3,3,1] = -1$

$q[1] = 3 \quad q[1,1] = q(1) = \alpha \quad q[3,1,1] = -\frac{\alpha+2}{2} \quad q[3,3,1,1] = \frac{\alpha}{4}$

$$\Rightarrow q(x) = q[3] + q[3,3] \cdot (x-3) + q[3,3,1] \cdot (x-3)^2 + q[3,3,1,1] \cdot (x-3)^2 \cdot (x-1) =$$

$$= -1 - 4(x-3) - (x-3)^2 + \frac{\alpha}{4}(x-3)^2(x-1) = -1 - 4x + 12 - (x^2 - 6x + 9) + \frac{\alpha}{4}(x^2 - 6x + 9)(x - 1$$

$$= -1 - 4x + 12 - x^2 + 6x - 9 + \frac{\alpha}{4}\left(x^3 - 6x^2 + 9x - x^2 + 6x - 9\right) =$$

$$= 2 + 2x - x^2 + \frac{\alpha}{4}\left(x^3 - 7x^2 + 15x - 9\right)$$

Bilden der 2. Ableitung:

$$q'(x) = 2 - 2x + 3\frac{\alpha}{4}x^2 - 14\frac{\alpha}{4}x + 15\frac{\alpha}{4}$$

$$q''(x) = -2 + 6\frac{\alpha}{4}x - 14\frac{\alpha}{4} = -2 + \frac{3}{2}\alpha x - \frac{7}{2}\alpha$$

(iii) **Setze** $p''(x) = q''(x)$ **(Forderung):**

$$\begin{aligned} 12 - 24x + 6\alpha x - 2\alpha &= -2 + \tfrac{3}{2}\alpha x - \tfrac{7}{2}\alpha \\ 14 - 24x &= \tfrac{3}{2}\alpha x - \tfrac{7}{2}\alpha - 6\alpha x + 2\alpha \\ 14 - 24x &= \alpha\left(\tfrac{3}{2}x - \tfrac{7}{2} - 6x + 2\right) \\ 14 - 24x &= \alpha\left(-\tfrac{9}{2}x - \tfrac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{14 - 24x}{-\frac{9}{2}x - \frac{3}{2}} = \frac{14 - 24x}{\frac{-9x-3}{2}} = \frac{28 - 248x}{-9x - 3} = \frac{28 - 48}{-12} = \frac{-20}{-12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

Aufgabe 23

Splinefunktion: $(x_0, f_0) = (0, 1)$, $(x_1, f_1) = (1, 2)$, $(x_2, f_2) = (3, 8)$, $(x_3, f_3) = (4, 16)$
Wir bestimmen den kubischen Spline mit natürlichen Randbedingungen, d. h. $s_0'' = 0 = s_3''$. Die Abstände der vorgegebenen Stützstellen berechnen sich leicht zu $h_0 = 1$, $h_1 = 2$, $h_2 = 1$.
Nach **Skript 4.41**:

$$g_1 := 6 \cdot \frac{f_2 - f_1}{h_1} - 6 \cdot \frac{f_1 - f_0}{h_0} = 6 \cdot \frac{8-2}{2} - 6 \cdot \frac{2-1}{2} = 18 - 6 = 12$$

und

$$g_2 := 6 \cdot \frac{f_3 - f_2}{h_2} - 6 \cdot \frac{f_2 - f_1}{h_1} = 6 \cdot \frac{16-8}{1} - 6 \cdot \frac{8-2}{2} = 48 - 18 = 30$$

Nach **Skript 4.40**:

$$h_0 s_0'' + 2(h_0 + h_1)s_1'' + h_1 s_2'' = g_1 = 12 \Rightarrow 6s_1'' + 2s_2'' = 12$$

$$h_1 s_1'' + 2(h_1 + h_2)s_2'' + h_2 s_3'' = g_2 = 30 \Rightarrow 2s_1'' + 6s_2'' = 30$$

In Matrixschreibweise:

$$A \cdot s'' = g \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1'' \\ s_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Berechne s_2:

$$s_1'' = \frac{12 - 2s_2''}{6} = 2 - \frac{s_2''}{3}$$

$$2 \cdot \left(2 - \frac{s_2''}{3}\right) + 6s_2'' = 30 \Rightarrow 4 - \frac{2}{3}s_2'' + 6s_2'' = 30$$

$$\frac{18s_2'' - 2s_2''}{3} = \frac{78}{3} \Rightarrow \frac{16s_2''}{3} = \frac{78}{3} \Rightarrow s_2'' = \frac{39}{8}$$

Berechne s_1:

$$s_1 = 2 - \frac{s_2''}{3} \Rightarrow s_1'' = 2 - \frac{\frac{39}{8}}{3} = \frac{3}{8} \Rightarrow s_1'' = \frac{3}{8}$$

Allgemein gilt für die Berechnung der Koeffizienten:

- $a_k = f_k$
- $b_k = \frac{f_{k+1} - f_k}{h_k} - \frac{h_k}{6}\left(s_{k+1}'' + 2s_k''\right)$
- $c_k = \frac{s_k''}{2}$
- $d_k = \frac{s_{k+1} - s_k''}{6h_k}$

Also:

$$\begin{array}{ll}
a_0 = f_0 = 1 & b_0 = \frac{2-1}{1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \\
a_1 = f_1 = 2 & b_1 = \frac{8-2}{2} - \frac{2}{6}\left(\frac{39}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8}\right) = 3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{45}{8} = \frac{9}{8} \\
a_2 = f_2 = 8 & b_2 = \frac{16-8}{1} - \frac{1}{6}\left(0 + 2 \cdot \frac{39}{8}\right) = 8 - \frac{1}{6} \cdot \frac{39}{4} = 8 - \frac{13}{8} = \frac{51}{8} \\
c_0 = \frac{s_0''}{2} = 0 & d_0 = \frac{\frac{3}{8} - 0}{6} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16} \\
c_1 = \frac{s_1''}{2} = \frac{\frac{3}{8}}{2} = \frac{3}{16} & d_1 = \frac{\frac{39}{8} - \frac{3}{8}}{6 \cdot 2} = \frac{36}{96} = \frac{3}{8} \\
c_2 = \frac{s_2''}{2} = \frac{\frac{39}{8}}{2} = \frac{39}{16} & d_2 = \frac{0 - \frac{39}{8}}{6 \cdot 1} = -\frac{39}{48} = -\frac{13}{16}
\end{array}$$

Die Splines werden wie folgt zusammengesetzt:

$$s_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3 \qquad (x \in [x_k, x_{k+1}]$$

Damit:

- $$s_0(x) = 1 + \frac{15}{16}x + \frac{1}{16}x^3 \qquad (0 \leq x \leq 1)$$
- $$s_1(x) = 2 + \frac{9}{8}(x-1) + \frac{3}{16}(x-1)^2 + \frac{3}{8}(x-1)^3 \qquad (1 \leq x \leq 3)$$
- $$s_2(x) = 8 + \frac{51}{8}(x-3) + \frac{39}{16}(x-3)^2 - \frac{13}{16}(x-3)^3 \qquad (3 \leq x \leq 4)$$

Aufgabe 24

Bei äquidistanter Stützstellen-Zerlegung $-1 = x_0 < x_1 = \frac{1}{N} < ... < x_{N-1} = \frac{N-1}{N}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ haben alle Teilintervalle die Länge $\frac{1}{N}$. Mit Satz 4.38 (Skript) ergibt sich für die Fehlerabschätzung für die vollständige interpolierende kubische Spline-Funktion s:

$$\sup_{x \in [-1,1]} \left| \left(e^{-x^2} - \frac{x^2}{e}\right) - s(x) \right| \leq \sup_{x \in [-1,1]} \left| \left(e^{-x^2} - \frac{x^2}{e}\right)^{(4)} \right| \cdot \frac{1}{N^4}$$

Bilde nun die benötigten Ableitungen:

$$(1.) \qquad \left(e^{-x^2} - \frac{x^2}{e}\right)' = -2xe^{-x^2} - \frac{1}{e} \cdot 2x$$

(2.) $$\left(e^{-x^2}-\frac{x^2}{e}\right)''=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}-\frac{1}{e}\cdot 2$$

(3.) $$\left(e^{-x^2}-\frac{x^2}{e}\right)'''=4xe^{-x^2}+8xe^{-x^2}+4x^2\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2}=4xe^{-x^2}+8xe^{-x^2}-8x^3e^{-x^2}=$$

$$=12xe^{-x^2}-8x^3e^{-x^2}$$

(4.) $$\left(e^{-x^2}-\frac{x^2}{e}\right)^{(4)}=12e^{-x^2}+12x\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2}-24x^2e^{-x^2}-8x^3\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2}=$$

$$12e^{-x^2}-24x^2e^{-x^2}-24x^2e^{-x^2}+16x^4e^{-x^2}=12e^{-x^2}-48x^2e^{-x^2}+16x^4e^{-x^2}$$

(5.) $$\left(e^{-x^2}-\frac{x^2}{e}\right)^{(5)}=12\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2}-48\cdot 2\cdot xe^{-x^2}-48x^2\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2}+16\cdot 4\cdot x^3e^{-x^2}+$$

$$+16x^4\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2}=-24xe^{-x^2}-96xe^{-x^2}+96x^3e^{-x^2}+64x^3e^{-x^2}-32x^5e^{-x^2}=$$

$$=e^{-x^2}\left(-120x+160x^3-32x^5\right)$$

(6.) $$\left(e^{-x^2}-\frac{x^2}{e}\right)^{(6)}=-2xe^{-x^2}\left(-120x+160x^3-32x^5\right)+e^{-x^2}\left(-120+480x^2-160x^4\right)=$$

$$=e^{-x^2}\left[-2x\left(-120x+160x^3-32x^5\right)+\left(-120+480x^2-160x^4\right)\right]=$$

$$=e^{-x^2}\left[240x^2-320x^4+64x^6-120+480x^2-160x^4\right]=$$

$$=e^{-x^2}\left[720x^2-480x^4+64x^6-120\right]$$

Bestimme das Maximum der 4. Ableitung durch Nullstellensuche an der 5. Ableitung. Der Faktor e^{-x^2} kann wegen $e^{-x^2}\neq 0$ hierfür weggelassen werden:

$$\Leftrightarrow -32x^5+160x^3-120x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(-32x^4+160x^2-120\right)=0$$

Erste Nullstelle ist also $n_0=0$. Zur Bestimmung der anderen teile durch 8 und setze $x^2=:a$ (Substitution):

$$\Leftrightarrow -4a^2+20a-15=0$$

$$\Rightarrow a_{1,2}=\frac{-20\pm\sqrt{400-240}}{-8}=\frac{-20\pm\sqrt{160}}{-8}=\frac{-5\pm\sqrt{10}}{-2}\approx\pm 0,959$$

Durch Einsetzen in die 6. Ableitung lässt sich feststellen, dass es sich bei den Extrema in $\pm 0,959$ um Minima handelt. Das Extremum bei 0 ist ein Maximum, denn $f^{(6)}(0)=-120<0$. An dieser Stelle ist $f^{(4)}$ also maximal: $f^{(4)}(0)=12$, d. h.

$$\sup_{x\in[-1,1]}\left|\left(e^{-x^2}-\frac{x^2}{e}\right)-s(x)\right|=12$$

Wir wollen $\sup_{x\in[-1,1]}\left|\left(e^{-x^2}-\frac{x^2}{e}\right)-s(x)\right|\leq 0,0001$, dazu brauchen wir $\frac{12}{N^4}\leq 0,0001$:

$$\frac{12}{N^4}\leq 0,0001\Rightarrow 12\leq N^4\cdot 10^{-4}\Rightarrow N>\left(\frac{12}{10^{-4}}\right)^{\frac{1}{4}}\Rightarrow N>19$$

Es werden also mindestens **19** äquidistante Stützstellen benötigt, um die gewünschte Genauigkeit bei der Interpolation durch Spline-Funktionen zu erreichen.